

Análisis de las mediciones de temperatura de la sonda HAZIAK 1

M. Membrado

ABSTRACT

En este trabajo se han analizado las temperaturas registradas por el sensor térmico de la sonda estratosférica HAZIAK 1. Comparando las mediciones efectuadas por este sensor con el modelo empírico de temperatura y densidad atmosféricas de U. S. Standard Atmosphere, se han estimado las altitudes a las que fueron tomadas. De acuerdo con estas estimaciones, la altitud máxima alcanzada por la sonda fue de 36.5 km. En este trabajo se han propuesto modelos de velocidad constante para el ascenso de la sonda. Estos muestran velocidades de 11.5 km/h hasta los 4 Km de altitud; de 22.7 km/h desde 4 hasta 15 km; y, 32.6 km/h en la estratósfera. También se ha tratado un modelo hidrodinámico, que tiene en cuenta la expansión del globo durante el ascenso y vientos verticales en la tropósfera. De este modelo se deduce que la sonda adquirió la velocidad máxima de ascenso a los 25 km de altitud, y fue de 33 km/h. En el momento del estallido del globo, éste tenía un radio de 5.36 metros y llevaba una velocidad de ascenso de 20 km/h. El modelo, además, indica una velocidad de viento descendente de 13.2 km/h a 1 km de altitud y de 3.1 km/h a los 10 km.

1. Introducción

Cuando se hacen mediciones desde sondas estratosféricas, son los registros de presión los que se utilizan para determinar la altitud a la que los sensores las tomaron. Estas altitudes se estiman comparando las presiones medidas con resultados de modelos empíricos. La razón de utilizar la presión como estimador de altitudes se halla en el hecho de que aunque las presiones a baja altitud dependen de cuando se registraron, éstas tienden a variar muy poco, en el tiempo, a medida que se toman a mayor altitud. Además se encuentra su comportamiento descendente.

Determinar altitudes a partir de temperaturas es una tarea algo más elaborada y que conduce a resultados más inexactos que los derivados a partir de la presión. El problema que uno se encuentra al tratar con temperaturas es que los resultados de las mediciones dependen mucho más de cuando se registraron que en el caso de presiones; además está el comportamiento de la temperatura en las cercanías de la tropopausa, donde pequeñas variaciones de temperatura pueden significar variaciones de altitud de varios kilómetros. En este artículo se propone un método para llevar a cabo este proceso, que se va a aplicar a los registros tomados por el sensor de temperaturas de HAZIAK 1.

Enmarcada dentro del programa HAZIAK del Ayuntamiento de Vitoria-Gasteiz, la sonda estratosférica HAZIAK 1⁽¹⁾ fue lanzada el 29 de junio de 2013, desde la ciudad de Vitoria-Gasteiz, por miembros del proyecto de divulgación astronómica "la otra mitad"⁽²⁾. Esta sonda llevó a cabo medidas de temperatura durante su ascenso en la tropósfera y en la estratósfera y durante su posterior caída. Las temperaturas fueron registradas por un sensor CMOS LMT86 de Texas Instruments⁽³⁾. Los datos recogidos se presentan en la Figura 1.

El cronómetro de la sonda se activó con anterioridad al lanzamiento de la sonda. En ese instante, la temperatura en superficie era 23.9° C, y 23.6° a los 6 minutos. Dado que el sensor de temperaturas comenzó a registrar un descenso de temperaturas a partir entonces, es de esperar que el lanzamiento tuviera lugar en ese instante. La sonda alcanzó el mínimo de temperaturas entre los minutos 45 y 56, tras la activación del cronómetro. La temperatura mínima medida fue de -50.4° C. Aunque esta temperatura está en el límite de fiabilidad del sensor (ver sus

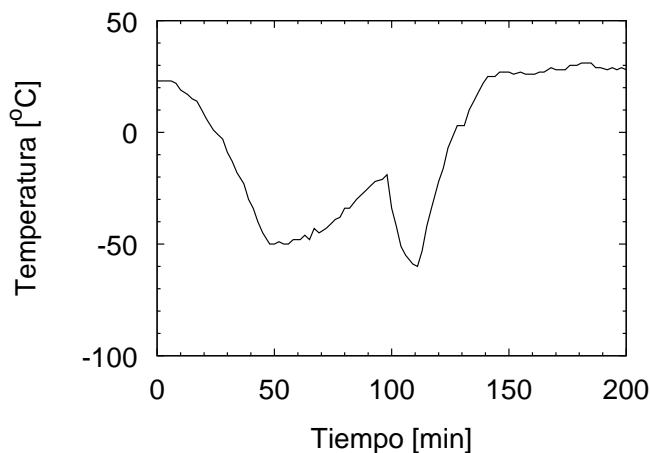


Fig. 1. Temperatura medida por un sensor CMOS LMT86 desde el instante de activación del cronómetro en la sonda HAZIAK 1.

especificaciones), este mínimo debe corresponder al paso de la sonda por la tropopausa. El aumento posterior de la temperatura indica que la sonda se adentró en la estratósfera. El máximo de temperaturas, que fue de -19.9° C, se alcanzó a los 98 minutos. Este instante debería de corresponder con el del estallido del globo.

La posterior caída de la sonda estratosférica fue amortiguada por un paracaídas. Al llegar a la superficie, la temperatura medida estaba entorno a los 27° C.

Así pues, la diferencia de temperaturas en superficie, entre el instante en el que se soltó la sonda y el instante en que tomó tierra, apenas difiere en 3 o 4 grados. En consecuencia, entre esos dos instantes, podemos despreocuparnos de las variaciones con el tiempo de la temperatura en la termósfera y en la estratósfera. Si esto no hubiera sido así, la comparación con un modelo empírico de atmósfera estandar hubiera sido bastante más compleja de llevar a cabo de lo que ha resultado.

Así mismo, debe de decirse que, según las especificaciones del sensor de temperaturas, sus medidas no son fiables por de-

bajo de los $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$. Esto significa que las temperaturas que el sensor tomó en la tropopausa van a ser inservibles. De hecho, contrasta que en el paso del sensor por la tropopausa, en el ascenso, éste registrara temperaturas de alrededor de los $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$, y que en el descenso registrara una temperatura mínima de $-60.2\text{ }^{\circ}\text{C}$.

En este trabajo, los registros de temperatura de la sonda han sido comparadas con el modelo empírico de temperatura atmosférica y densidad de U. S. Standard Atmosphere^(4,5) (USSA76, de aquí en adelante). En la figura 2, se presenta este modelo frente a la altitud hasta 50 km. Debe de decirse, además, que, al ser menos fiables las medidas tomadas por el sensor en su descenso por la tropopausa, en este estudio solo se va a tratar el ascenso de la sonda.

La sección 2 está dedicada a la presentación del método de estimación de altitudes a partir de mediciones de temperatura. En la sección 3 se proponen modelos de velocidad constante para el ascenso de la sonda. En la sección 4 se presenta un modelo hidrodinámico para el movimiento vertical de un globo sonda estratosférico. En la sección 5 se analiza el modelo presentado en la sección anterior para el caso en el que no hubiera viento vertical. En la sección 6 se trata un modelo de viento vertical para analizar el modelo hidrodinámico. Finalmente, en la sección 7 se presentan las conclusiones.

Para concluir esta sección, debe de decirse que ha parecido de interés incluir en este trabajo dos apéndices dedicados al ajuste de un modelo a resultados experimentales. Asimismo, se ha incluido un tercer apéndice en donde se presenta la física del ascenso de un globo sonda estratosférico.

2. Altitud de la sonda en función del tiempo

En el instante del lanzamiento, asumimos que el sensor de temperaturas registró $23.6\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ésta es la temperatura que vamos a tomar como referencia. Esta temperatura contrasta con la que proporciona el modelo empírico USSA76 para la altitud desde la que fue lanzada la sonda. Así, según USSA76, a 527 m, que corresponde a la altitud de Vitoria-Gasteiz, encontraríamos una temperatura de $11.6\text{ }^{\circ}\text{C}$ (en la tropósfera, la temperatura decae a razón de 6.5 ° por kilómetro). En consecuencia, para poder comparar la temperatura medida con la del modelo, va a ser necesario reescalar los datos registrados por el sensor. Así, este estudio se va a hacer para unas temperaturas reducidas que corresponden a las medidas menos $12\text{ }^{\circ}\text{C}$.

En este trabajo se va a suponer que el sensor de temperaturas de la HAZIAK 1, presenta un error de medida de temperaturas de $\pm 2\text{ }^{\circ}$. Este error se considerará a partir de la siguiente medida tomada tras el lanzamiento de la sonda. Cuando asumimos que el sensor registra un exceso de temperatura de $+2\text{ }^{\circ}$, la temperatura real es dos grados inferior a la medida; a su vez si registra un defecto de temperatura de -2 ° , la temperatura real es dos grados superior a la medida por el sensor. En secciones posteriores vamos a tener en cuenta este valor del error de medida del sensor para fijar los parámetros de diferentes modelos teóricos que hacen que esos modelos sean el mejor ajuste a las medidas experimentales (en nuestro caso, altitud alcanzada por la sonda en función del tiempo); la determinación de esos parámetros se llevará a cabo buscando aquellos que hacen que el estadístico χ^2 sea mínimo (este estadístico se definirá posteriormente).

La comparación de los datos medidos por HAZIAK 1 con el modelo empírico USSA76 ha permitido estimar, mediante una interpolación polinomial⁽⁶⁾, la altitud a la que el sensor tomó cada valor de temperatura. Los resultados se presentan en la figura 3.

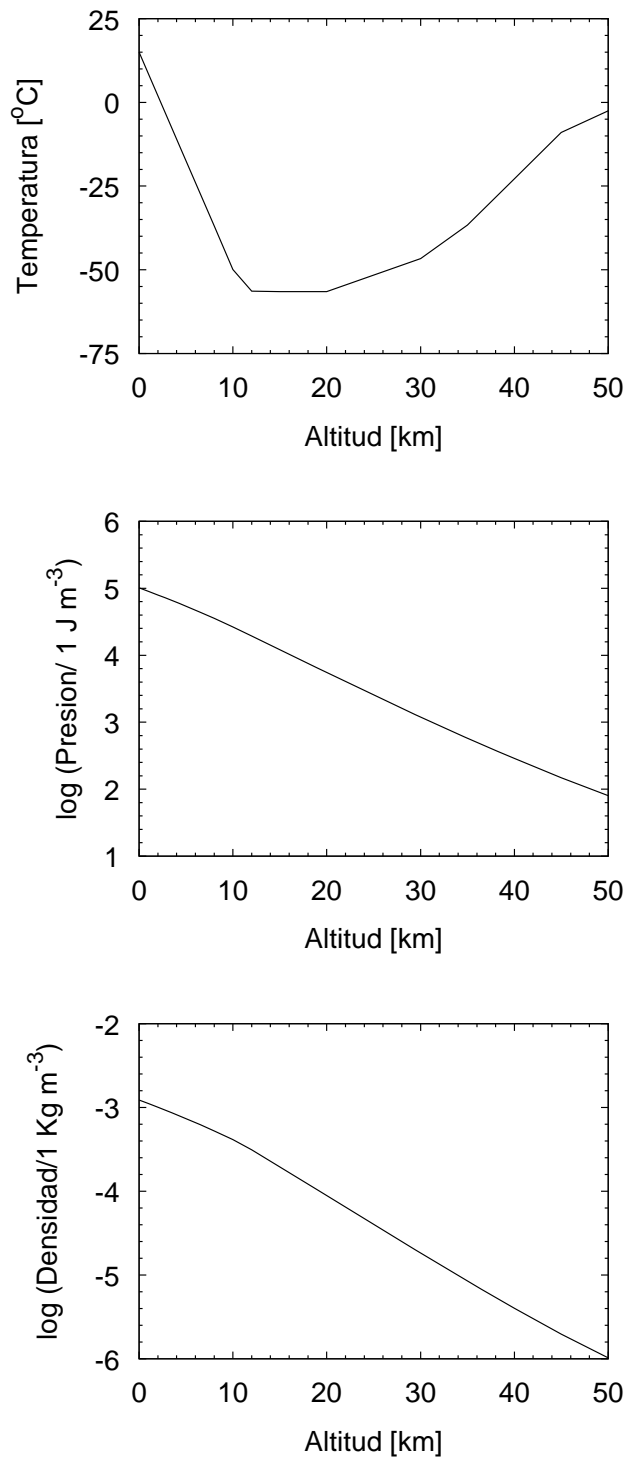


Fig. 2. Temperatura, presión y densidad en función de altitud para la atmósfera terrestre hasta 50 km, de acuerdo con el modelo empírico USSA76.

En figura 3 se muestra el rango de altitudes alcanzado por la sonda en cada uno de los instantes, t_i , en los que el sensor de temperaturas hizo mediciones. La figura 3 nos presenta, para cada instante t_i , la altitud alcanzada por sonda, $z(t_i)$, en el caso en el que el sensor no presente errores de medida, y las altitudes máxima y mínima, $z^{\pm}(t_i)$, asumiendo que éste tiene un error de medida de $\pm 2\text{ }^{\circ}\text{C}$.

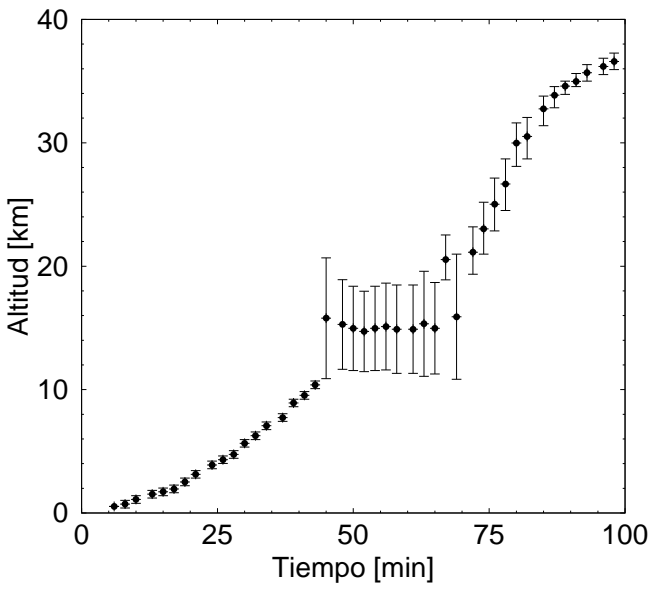


Fig. 3. Altitud alcanzada por la sonda HAZIAK 1 en su ascenso, en función del tiempo. Ha sido obtenida ajustando las temperaturas registradas por la sonda al modelo empírico USSA76. Las barras de error representan el rango de altitudes suponiendo que el sensor de temperaturas de la HAZIAK 1 presenta un error de $\pm 2^\circ\text{C}$.

Como puede apreciarse a partir de la figura 2, en la tropósfera, la temperatura decrece con la altitud, mientras que en la estratósfera, crece. Esto hace que los errores de medida de temperatura del sensor conduzcan a consecuencias opuestas. En la tropósfera, si el sensor presenta un error de medida de $+2^\circ$, la altitud de la sonda debe ser superior a aquella en la que estaría si el sensor midiera la temperatura correcta ($z^+(t_i) > z(t_i)$); si, en cambio, el sensor tiene un error de -2° , la altitud de la sonda sería inferior ($z^-(t_i) < z(t_i)$). En la estratósfera, el efecto, con respecto a las altitudes, es el opuesto ($z^+(t_i) < z(t_i)$; $z^-(t_i) > z(t_i)$).

Asimismo, en las cercanías de la tropopausa, pequeñas diferencias de temperatura representan grandes variaciones de altitud, desde los 10 km hasta los 20.1 km. Esto ha conducido al gran tamaño de las barras de error que aparecen en la figura 3 para esta región. Para determinar estas barras en los alrededores de la tropopausa, hemos interpolado las temperaturas reducidas (a partir de las mediciones de temperatura del sensor) tanto al modelo USSA76 para la estratósfera, como al modelo USSA76 para la tropósfera.

De la figura 3, podemos advertir que en la tropósfera, un error de medida del sensor de temperatura de $\pm 2^\circ\text{C}$ no afecta excesivamente a la determinación de la altitud de la sonda en función del tiempo. Esto, en cambio, no es así en la estratósfera, donde las variaciones de temperatura con la altitud son más suaves. Finalmente, indicamos que, de acuerdo con estos datos, la altitud máxima fue de 36.6 ± 0.7 km.

3. Modelos de velocidad constante para el ascenso de la sonda

3.1. Presentación del modelo

Si suponemos que la sonda se está moviendo a velocidad constante, v , la altitud que va alcanzando, z , en cada instante t , viene dada por:

$$z = v(t - t_r) + z_r, \quad (1)$$

donde z_r es la altitud alcanzada por la sonda en un determinado instante t_r .

La ecuación (1) representa el modelo propuesto, z_{mod} . Este modelo depende de dos parámetros independientes: v , $-v t_r + z_r$. En este estudio, se tratarán diferentes intervalos de tiempo en los que se estimarán los mejores modelos del tipo representado por la ecuación (1). Para cada intervalo estudiado se tomará t_r como el instante de la primera medición llevada a cabo por el sensor en ese intervalo; en consecuencia, los parámetros independientes del modelo serán, ahora, v , z_r . Así, para cada instante t_i en el que el sensor hizo una medición de temperatura, el modelo prediciría una altitud para la sonda

$$z_{mod}(t_i; v) = v(t_i - t_r) + z_r, \quad (2)$$

Los parámetros v y z_r , que conducen al mejor ajuste a las mediciones en cada intervalo de tiempo, serán aquellos que minimicen el estadístico χ^2 dado por (ver apéndices A.1 y B.1):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{z(t_i) - z_{mod}(t_i; v, z_r)}{\sigma(t_i)} \right]^2, \quad (3)$$

donde, por simplicidad, tomaremos (ver apéndice B.1)

$$\sigma(t_i) = \frac{|z^+(t_i) - z^-(t_i)|}{2} \quad (4)$$

En la ecuación (3), N es el número de datos medidos por la sonda en el correspondiente intervalo y que se utilizan para ajustar el modelo; $z(t_i)$ son los resultados experimentales representados por puntos en la figura 3; y, $z^+(t_i)$ y $z^-(t_i)$ ya han sido definidos en la sección anterior (σ , en la ecuación 4, es, por lo tanto, el promedio de las longitudes de las barras de error, superior e inferior, de cada dato que aparece en la figura 3).

Una vez determinados los valores de los parámetros que minimizan χ^2 , al que llamaremos χ_{min}^2 , podemos estimar el valor de los parámetros que conducen a modelos que ajustan aceptablemente a las mediciones. Así, y de acuerdo con el apéndice A.4 (ver también apéndices A.2 y A.3), y como tenemos dos parámetros en el modelo, los modelos dentro de 1σ serán aquellos cuyo χ^2 verifique

$$\chi^2 \leq \chi_{min}^2 + \Delta\chi_{1\sigma;2}^2, \quad (5)$$

con $\Delta\chi_{1\sigma;2}^2 = 2.29569$.

Vamos a interpretar la ecuación (5). Estamos suponiendo que los parámetros del modelo v , z_r se distribuyen según una distribución gaussiana de probabilidad (ver ecuación (A.10)), entorno a los parámetros que conducen al mejor ajuste, que son v^0 y z_r^0 . Con esto se pretende indicar que contra mayor sea esta probabilidad, más cercano estará el valor del parámetro al mejor valor, y por lo tanto conducirá a un modelo con un buen ajuste. El valor mínimo de los χ^2 , calculados usando la ecuación (3), que llamamos χ_{min}^2 , corresponde a los parámetros v^0 y z_r^0 del mejor modelo. Cualquier otro par de parámetros dará un $\chi^2 > \chi_{min}^2$, indicando que el modelo al que conducen no es tan bueno. La igualdad en la ecuación (5) indica que todos los pares de parámetros que la verifican representan el 68% de todos los posibles pares de parámetros. A partir de este resultado, podríamos dibujar, en un diagrama v - z_r , los contornos de probabilidad 1σ , de tal manera que todos los puntos interiores al contorno abarcarían el 68.2689% de todas las pares de parámetros posibles; estos pares de parámetros son los que podríamos considerar como buenos.

De la misma manera, aquellos dentro de 2σ serán los que verifiquen

$$\chi^2 \leq \chi_{min}^2 + \Delta\chi_{2\sigma;2}^2, \quad (6)$$

con $\Delta\chi_{2\sigma;2}^2 = 6.17677$. En este caso, todos los que verifiquen (6) representan el 95.4500% de todos los posibles pares de parámetros.

3.2. Resultados

Echando un vistazo a la figura 3, podemos advertir tres intervalos de tiempo en los que podría ser posible considerar un ascenso de la sonda a velocidad constante. Estos intervalos abarcan tiempos entre 8 y 24 minutos (tropósfera), entre 26 y 56 minutos (tropósfera), y entre 58 y 98 minutos (estratósfera).

En las imágenes de la izquierda de la figura 4 se muestran los modelos que mejor ajustan a los datos de la figura 3 en estos tres intervalos de tiempo considerados. Los resultados de cada modelo se representan por una línea continua; en la misma imagen aparecen los resultados de la figura 3 para cada intervalo.

En las imágenes de la derecha de la figura 4, se representan diagramas v, z_r : el punto indica el valor de los parámetros que conducen al modelo que mejor ajusta a los datos experimentales; las líneas continuas cerradas presentan los contornos de probabilidad 1σ y 2σ .

En el primer intervalo de tiempo, entre 8 y 24 minutos, contamos con $N = 8$ datos experimentales. Para este intervalo de tiempo, $v = 11.43$ km/h y $z_r = 0.567$ km son los valores de los parámetros que conducen al modelo que mejor ajusta. Estos parámetros presentan $\chi_{min}^2 = 3.131$, que lo denotaremos por $\chi_{min}^2/N = 3.689/8$. Fijando z_r al valor que conduce al mejor ajuste, esto es a $z_r = 0.567$, la condición de probabilidad menor o igual a 1σ (ver ecuación (5)) permite decir que $v = 11.43 \pm 1.05$ km/h; a su vez, tomando $v = 11.43$ km/h, $z_r = 0.567 \pm 0.165$ km. Como puede apreciarse hay más imprecisión en la determinación del parámetro de altitud que en la del de velocidad.

En el segundo intervalo de tiempo, que lo tomamos entre 26 y 56 minutos, tenemos $N = 15$ datos. Aquí, hemos obtenido que el mejor ajuste se consigue con $v = 21.73$ km/h y $z_r = 4.128$ km, que conducen a $\chi_{min}^2/N = 4.583/15$. Este resultado indica que el ajuste en este intervalo es algo mejor que en el intervalo anterior. Debe de decirse, también, que las grandes barras de error que aparecen en este intervalo, y que corresponden al paso de la sonda por la tropopausa, no afectan al resultado; de hecho el ajuste del modelo lo imponen los datos a altitudes inferiores a la tropopausa. Finalmente, la condición de probabilidad 1σ nos dice que $v = 21.73 \pm 0.91$ km/h y $z_r = 4.128 \pm 0.155$ km.

En el tercer intervalo de tiempo que hemos tomado, y que corresponde al del paso de la sonda por la estratósfera, el sensor tomó $N = 19$ mediciones. Para este intervalo, el modelo que mejor ajusta es aquel que tiene como parámetros $v = 32.60$ km/h y $z_r = 16.774$ km, con $\chi_{min}^2/N = 36.118/19$. Este último resultado indica que el ajuste en este intervalo es mucho peor que en los dos intervalos anteriores, a pesar de que las barras de error son mayores en este intervalo de tiempo. Para concluir, diremos que la condición 1σ indica $v = 32.60 \pm 0.623$ km/h y $z_r = 16.774 \pm 0.333$ km.

Los resultados obtenidos a partir de la condición de probabilidad 1σ , manteniendo fijo el mejor valor de uno de los parámetros, pueden conducir a una interpretación errónea. Esto es debido a que no manifiestan suficientemente el efecto del tamaño de las barras de error de cada uno de los intervalos. Para

ver los efectos del tamaño de estas barras hay que echar un vistazo a los contornos de probabilidad 1σ y 2σ que aparecen en las imágenes de la derecha de la figura 4. Allí vemos que estos contornos para los intervalos primero y segundo son bastante similares, pero difieren considerablemente de los contornos de probabilidad del tercer intervalo. De hecho, para 2σ , z_r puede diferir en algo más de 4 km para el tercer intervalo, frente a los 1.5 km para los dos primeros intervalos. Un efecto similar ocurre en las velocidades; así, mientras que en los dos primeros, éstas difieren en unos 6 km/h, en el tercer intervalo llegan a diferir en casi 10 km/h.

4. Modelo hidrodinámico para el ascenso de la sonda

4.1. Presentación del modelo

Para estudiar el movimiento vertical de la sonda hay que tener en cuenta dos hechos: que el globo va a adquirir una velocidad de ascenso que va a hacer que la fuerza de ascensión esté compensada por la fuerza de arrastre; y, que el globo va a ir adquiriendo un tamaño que va a hacer que el efecto de la tensión superficial⁽⁷⁾ del globo unido a la presión del aire exterior, compense la presión del helio contenido en él.

Si la masa de aire desalojada por el globo es mayor que la masa total de la sonda, ésta asciende de manera acelerada. La fuerza de ascenso es, en consecuencia, el producto de la aceleración de la gravedad por la diferencia entre estas dos masas. Como la máxima altitud que puede alcanzar la sonda es mucho menor que el radio de la Tierra, podemos tomar para la aceleración de la gravedad su valor al nivel del mar, independientemente de la altitud.

Sin embargo, a medida que el globo gana velocidad, sufre los efectos de la fricción con el aire atmosférico. Esta fuerza de arrastre, que depende de la diferencia de velocidades entre la sonda y el viento, es tan eficiente que compensa casi instantáneamente la fuerza ascensorial. Como consecuencia, el ascenso se produce a aceleración cero. A este respecto, debe de advertirse que esto no significa que el ascenso se lleve a cabo a velocidad constante.

En este estudio supondremos que el globo y el helio contenido en él están en equilibrio térmico con la atmósfera. Esta situación solo puede alcanzarse si las colisiones del gas atmosférico con el globo y la colisiones del helio con el globo son tan numerosas que tan apenas ha ascendido algo la sonda, el globo y el helio ya alcanzan la temperatura exterior. Como la presión y temperatura de la atmósfera cambian con la altitud, el radio del globo debe de acomodarse para que la presión del helio compense la presión externa y el efecto de la tensión superficial del globo.

Conforme el globo asciende, su radio cambia, a la vez que lo hace la densidad del aire de la atmósfera. En consecuencia, la fuerza de ascenso es diferente en cada instante, por lo que la fuerza de arrastre también lo es. Así pues, aunque el ascenso se hace a aceleración cero, éste se lleva a cabo a velocidad variable.

Echando un vistazo al modelo de ascenso de la sonda, puede verse que éste precisa del conocimiento de la presión, temperatura y densidad de la atmósfera, de la masa total del globo sonda estratosférico, de varias constantes, y de tres parámetros.

Al igual que se hizo en las secciones anteriores, los valores de presión, \mathcal{P} , temperatura, T y densidad de masa, ρ , del aire atmosférico a diferentes altitudes, z , se van a tomar del modelo empírico USSA76.

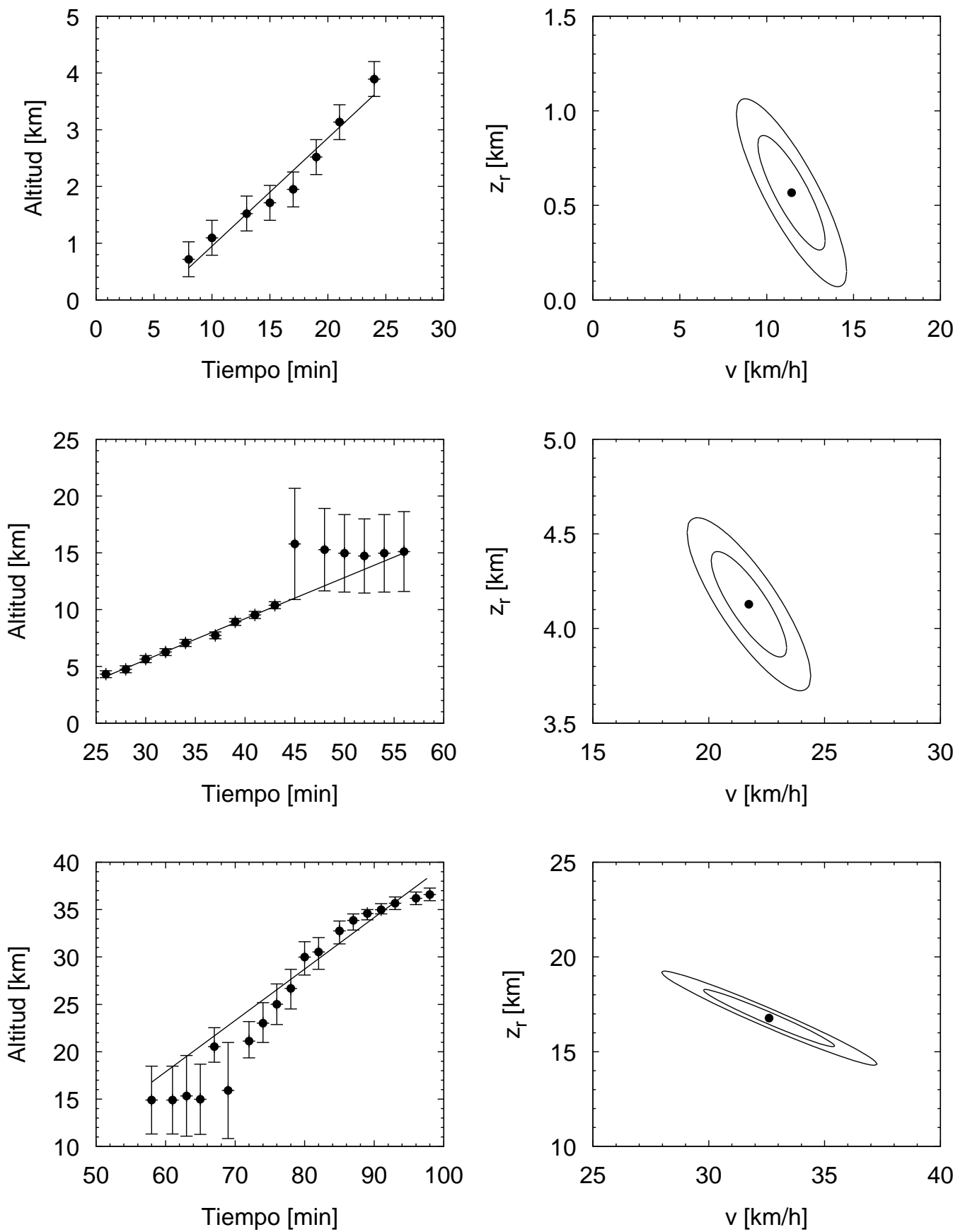


Fig. 4. Modelos de velocidad de ascenso constante. Izquierda: la línea continua representa el mejor ajuste en cada intervalo de tiempo; los puntos y las barras de error corresponden a datos experimentales (ver sección 2). Derecha: el punto central son los valores de los parámetros que conducen al mejor ajuste; las líneas continuas cerradas son los contornos de probabilidad 1σ y 2σ .

Hay que decir, que la masa total de la sonda estratosférica, M , es suma de varias masas. De hecho,

$$M = M_G + M_M + M_{He} \quad (7)$$

donde M_G es la masa del globo, M_M es la masa del material que transporta la sonda, y M_{He} es la masa de Helio. En el caso de la sonda estratosférica Haziak 1, $M_G = 1.6$ kg y $M_M = 0.9$ kg (incluye la masa del paracaídas, la masa del instrumental y la masa de la caja que lo contiene). La masa de helio puede determinarse a partir de la cantidad de volumen de helio, V_{He} , que se introdujo en el globo. Si este volumen está medido bajo condiciones normales de temperatura, $T_0 = 288.15$ K (= 15° C), y de presión, $\mathcal{P}_0 = 1.01325 \times 10^5$ Pa (= 1013.25 mb), el número de átomos de helio que habrá, entonces, en el globo, N_{He} , se determina asumiendo que el helio se comporta como un gas ideal; esto es, a partir de

$$N_{He} = \frac{\mathcal{P}_0 V_{He}}{K_B T_0}, \quad (8)$$

donde K_B es la constante de Boltzmann. Y, en consecuencia, la masa de helio será

$$M_{He} = m_{He} N_{He}, \quad (9)$$

donde $m_{He} = 6.646476 \times 10^{-27}$ kg es la masa de un átomo de helio. En el caso de Haziak 1, $V_{He} = 6.3$ m³, por lo que $N_{He} = 1.6045 \times 10^{26}$ y $M_{He} = 1.067$ kg.

Por su parte, las constantes que presisa el modelo son: la constante de Boltzmann, $K_B = 1.3806504 \times 10^{-23}$ J/K; el coeficiente de arrastre, $C_d = 0.44$; y, la aceleración de la gravedad al nivel del mar, $g = 9.81$ m/s².

Finalmente, los parámetros del modelo van a ser aquellos que modelizan la tensión superficial del globo y el viento vertical. Al no tener información del fabricante del globo acerca de su tensión superficial, tomamos como parámetro a ajustar el doble de la tensión superficial, que denotaremos por, α . Para el viento vertical supondremos que éste disminuye con la altitud de acuerdo con una potencial de ésta. Los parámetros del modelo de viento serán, en consecuencia, la velocidad del viento a 1 km de altitud, v_s , y el exponente al que va elevado la altitud, β . Así pues, para describir el ascenso de la sonda debemos de fijar estos tres parámetros. Al igual que se ha hecho en la anterior sección, estos parámetros se determinaran asumiendo que son aquellos que conducen al modelo que mejor ajusta a los resultados experimentales presentados en la sección 2.

4.2. Ecuaciones del movimiento de la sonda

En el apéndice C detallamos cómo se puede hacer un estudio del ascenso de un globo en la atmósfera. Allí están expresadas las ecuaciones diferenciales cuya resolución nos permitirá conocer la altitud que va alcanzando el globo en función del tiempo. Bajo las aproximaciones que hemos detallado en la subsección anterior, las ecuaciones que van a permitir determinar el movimiento de la sonda van a ser:

$$0 = \left[\frac{4\pi}{3} R^3(z) \rho(z) - M \right] g \mp \frac{\pi}{2} R^2(z) C_d \rho(z) (v - v_a)^2, \quad (10)$$

$$\mathcal{P}(z) = \frac{N_{He}}{4\pi R^3(z)/3} K_B T(z) - \frac{\alpha}{R(z)}. \quad (11)$$

En las ecuaciones (10) y (11), z es la altitud el globo, v es su velocidad de ascenso, y v_a es la velocidad vertical del aire; $\mathcal{P}(z)$, $\rho(z)$ y $T(z)$ son la presión hidrostática, densidad de masa y

temperatura del aire de la atmósfera a altitud z ; $R(z)$ es el radio del globo a altitud z ; α es el el doble de la tensión superficial del material del que está hecho el globo; N_{He} es la cantidad de átomos de helio introducidos en el globo; M es la masa total de la sonda; y, finalmente C_d es el coeficiente de arrastre, y g es la aceleración de la gravedad al nivel del mar.

Asímismo, debemos advertir que en la ecuación (10), el signo negativo se tomará cuando $v - v_a > 0$, mientras que el signo positivo se utilizará en caso contrario.

5. Modelo hidrodinámico sin viento para el ascenso de la sonda

5.1. Presentación del modelo

En esta subsección podríamos tratar un modelo que dependiera de un único parámetro; éste sería el parámetro α , que es el doble de la tensión superficial del globo, cuyo valor desconocemos. Es decir, podríamos ver si el modelo $z_{mod}(t; \alpha)$ es capaz de dar cuenta de las medidas experimentales. Este modelo se obtendría a partir de las ecuaciones (10) y (11), asumiendo $v_a = 0$. Además, debe de decirse que para comparar este modelo con los datos experimentales hay que tener en cuenta que el globo se lanzó a 527 metros de altitud sobre el nivel del mar (altitud de la ciudad de Vitoria-Gasteiz) cuando el cronómetro de la sonda marcaba 6 minutos.

Para este modelo, uno puede calcular el valor del parámetro α que minimiza el estadístico

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{z(t_i) - z_{mod}(t_i; \alpha)}{\sigma(t_i)} \right]^2, \quad (12)$$

donde, N , $z(t_i)$ y $\sigma(t_i)$ fueron ya definidos en la sección 3 (N es el número de datos experimentales que aparecen en la figura 3; z son los resultados experimentales representados por puntos en esa figura; y, σ es el promedio de la longitud de las barras de error de cada uno de los datos que aparecen en la misma figura). Ocurre, sin embargo, que el valor de χ_{min}^2 es muy grande, lo que implica que el modelo es bastante malo al no reproducir suficientemente bien los resultados experimentales.

Echando un vistazo a la figura 3, podríamos probar, ahora, con un modelo que solo se testeara con datos experimentales por encima del primer intervalo estudiado en la sección 3. Además podríamos contar con otro nuevo parámetro. Este nuevo parámetro va a ser el tiempo que marca el cronómetro de la sonda cuando el globo del modelo se suelta, Δt_m . En el modelo previo, Δt_m estaba fijado y tomaba un valor de 6 minutos; ahora, en este nuevo modelo, lo consideramos como un parámetro a determinar. Así pues, nuestro nuevo modelo tiene ahora dos parámetros, y lo vamos a representar por $z_{mod}(t; \alpha, \Delta t_m)$. La siguiente subsección muestra los resultados obtenidos al estudiar este modelo.

5.2. Resultados

En la figura 5, se muestra, mediante una línea continua, el modelo $z_{mod}(t; \alpha, \Delta t_m)$ que mejor ajusta a los datos de la figura 3, a partir de los 30 minutos desde que el cronómetro se activó. En la misma figura aparecen los resultados presentados en la figura 3. Los parámetros del mejor modelo son: $\Delta t_m = 17.30$ min y $\alpha = 2.155 \times 10^3$ Pa m. Para estos parámetros $\chi_{min}^2/N = 31.22/32$. En consecuencia este modelo describe mucho mejor el ascenso de la sonda por la estratósfera que el modelo de velocidad constante. Así mismo, también describe bien el ascenso durante el

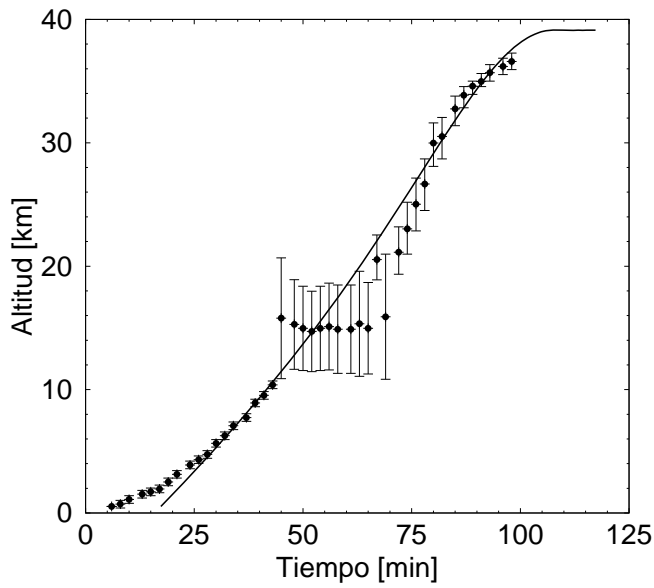


Fig. 5. Mejor modelo hidrodinámico de ascenso sin viento del tipo tratado en la sección 5. La línea continua representa el modelo; los puntos y las barras de error corresponden a datos experimentales (ver sección 2).

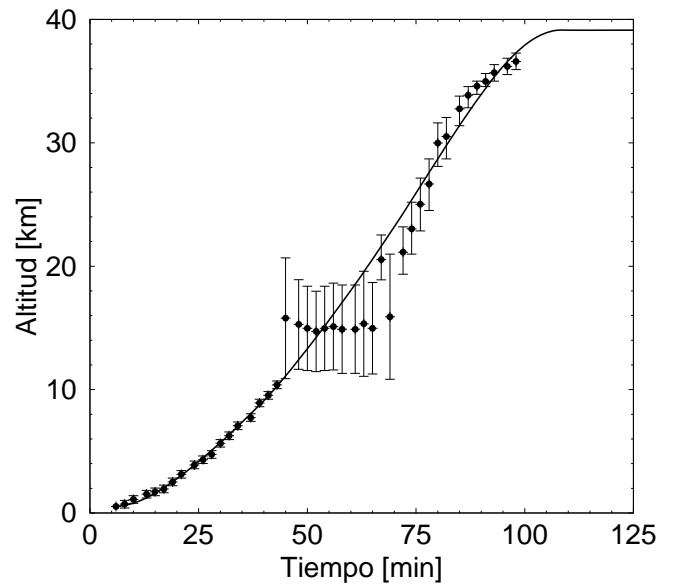


Fig. 7. Mejor modelo hidrodinámico de ascenso con viento vertical del tipo tratado en la sección 6. La línea continua representa el modelo; los puntos y las barras de error corresponden a datos experimentales (ver sección 2).

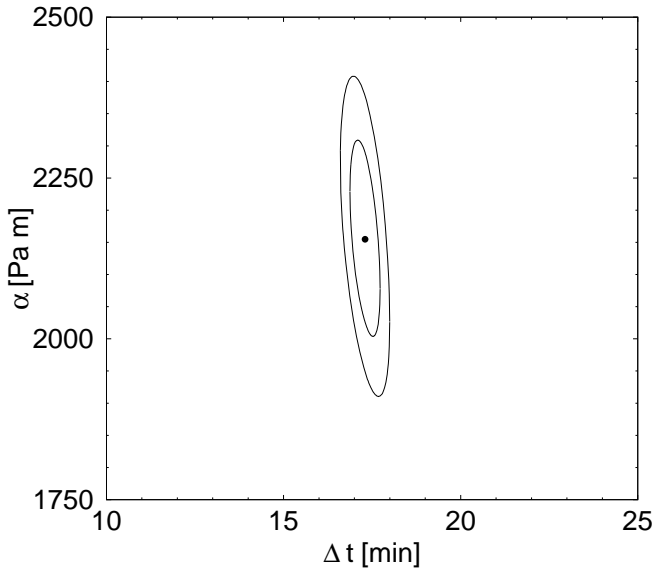


Fig. 6. Contornos de probabilidad para modelos hidrodinámicos de ascenso sin viento del tipo tratado en la sección 5. El punto central son los valores de los parámetros que conducen al mejor ajuste; las líneas continuas cerradas son los contornos de probabilidad 1σ y 2σ .

segundo intervalo de tiempo que se consideró en la sección anterior.

En la figura 6, se presentan los contornos de probabilidad 1σ y 2σ para Δt_m y α . Por los datos de esta figura, advertimos que Δt_m está bastante fijado debido a las pequeñas barras de error de los datos experimentales tomados en la tropósfera. La mayor longitud de estas barras de error en la estratósfera hace que α esté peor definido.

En cualquier caso, este modelo es incompleto dado que no es capaz de describir, en absoluto, el ascenso del globo en la baja tropósfera; en consecuencia, debemos de desecharlo. Así

pues, un modelo hidrodinámico sin viento vertical es incapaz de describir de una manera aceptable todo el ascenso de una sonda estratosférica.

Echando un vistazo a la figura 5, debemos de decir que en la baja tropósfera debió de haber viento vertical descendente. Esto hizo que el ascenso del globo fuera más lento, hasta aproximadamente 5 km de altitud, que en el caso en el que no hubiera habido viento. A partir de ahí el modelo sin viento ajusta bastante bien a las mediciones. En la estratósfera también se aprecian (a partir de esta figura) vientos descendentes desde aproximadamente los 20 km hasta la tropopausa, y ascendentes desde los 20 km hasta los 30 km.

En la siguiente sección, mejoraremos el modelo, introduciendo viento vertical en la tropósfera. Así, buscando el modelo que mejor ajuste a las mediciones conoceremos la velocidad de este viento descendente. En este trabajo no estudiaremos el caso de vientos en la estratósfera. Estos se tratarán con posteriores mediciones que se tomarán desde una nueva sonda estratosférica que se lanzará próximamente.

6. Modelo hidrodinámico con viento vertical en la tropósfera para el ascenso de la sonda

6.1. Presentación del modelo

Debe de advertirse que cuando hay viento descendente ($v_a < 0$), su velocidad vertical no puede superar un determinado valor para que el globo pueda elevarse. A partir de la ecuación (10), puede verse que debe de cumplirse la condición:

$$|v_a(z = z_0)| \leq \sqrt{\frac{2g}{\pi R^2(z_0) C_d \rho(z_0)} \left(\frac{4\pi}{3} R^3(z_0) \rho(z_0) - M \right)}, \quad (13)$$

donde z_0 es la altitud del lugar de lanzamiento.

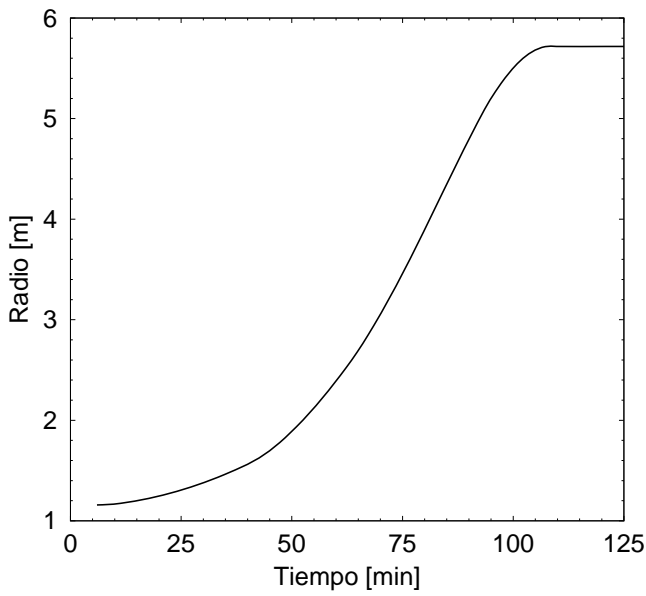


Fig. 8. Evolución del radio del globo en función del tiempo registrado por el cronómetro de la sonda.

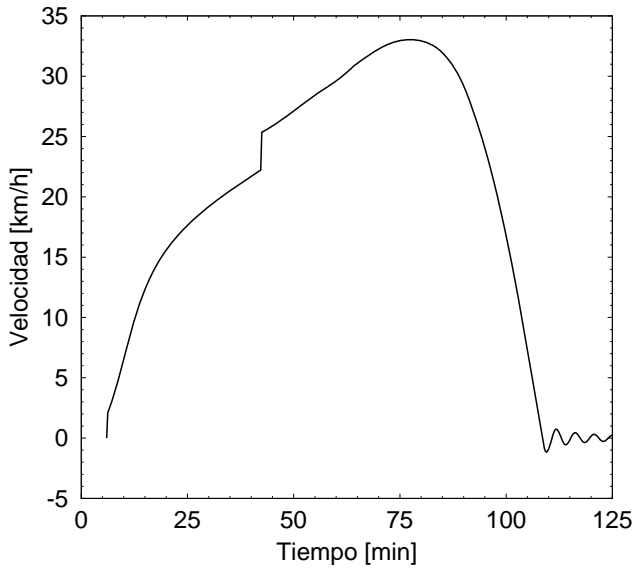


Fig. 9. Velocidad de ascensión de la sonda en función del tiempo registrado por su cronómetro.

Se pueden proponer diferentes modelos para el viento vertical. Aquí, vamos a considerar

$$v_a(z) = -v_s \left(\frac{z}{1 \text{ km}} \right)^{-\beta}, \quad (14)$$

donde v_s es la velocidad del viento a un kilómetro de altitud con respecto del nivel del mar. Si $v_s > 0$ el viento es descendente; en cambio, si $v_s < 0$ el viento es ascendente. Si $\beta < 0$, tendríamos un viento que disminuye con la altitud; en caso contrario, si $\beta > 0$, el viento aumentaría con z . Debemos advertir que, este modelo de viento, diverge a la altitud del nivel del mar ($z=0$); no obstante, como nuestro nivel del suelo está por encima del nivel del mar, no vamos a tener ningún problema de divergencias.

Los parámetros del modelo van a ser, ahora, v_s , β , y α ; de manera que podemos designar el modelo como $z_{mod}(t; v_s, \beta, \alpha)$.

6.2. Resultados

En la figura 7 representamos el mejor modelo $z_{mod}(t; v_s, \beta, \alpha)$. Los valores de los parámetros que conducen al mejor ajuste con los datos experimentales, mostrados en la sección 2, son: $v_s = 13.19 \text{ km/h}$, $\beta = 0.6334$, $\alpha = 2018 \text{ Pa m}$. Para estos valores, $\chi_{min}^2/N = 33.63/42$.

Como puede apreciarse en esta figura, el ajuste en la tropósfera con los datos experimentales es excelente. Para la estratósfera, nos encontramos con el mismo problema que vimos con el modelo tratado en la sección 5; es decir, que la sonda se tuvo que encontrar con vientos verticales. En este trabajo, como ya dijimos, no vamos a tratar estos vientos.

En el modelo tratado en esta sección no hemos considerado que el globo estalla. Así vemos el comportamiento de la sonda alcanzando una altitud máxima y manteniéndose en ella indefinidamente, mientras no pierda masa de helio (el material del globo no es estanco, e irá perdiendo la pérdida de helio con el tiempo).

En la figura 8, vemos el radio del globo en función del tiempo registrado por el cronómetro de la Haziak 1. Debemos recordar que el globo se soltó cuando este cronómetro marcaba 6 minutos. De acuerdo con los datos experimentales, la ruptura del globo tubo lugar cuando el cronómetro de la sonda marcaba 98 minutos; según nuestro modelo, en ese instante, el globo tendría un radio de 5.40 metros. Echando, ahora, un vistazo a los datos técnicos del material del globo⁽⁸⁾, vemos que éstos indican que el radio de ruptura es de 4.11 metros. Esto significa que las condiciones de temperatura y presión de la estratósfera han permitido que el material del globo se expandiera, sin llegar a la ruptura, mucho más que en las condiciones a nivel de suelo. A partir de la figura 8, vemos que si el globo no hubiera estallado, hubiera llegado a alcanzar un radio de 5.72 metros, con el que se mantendría indefinidamente si el globo no tubiera pérdidas de masa.

En la figura 9, presentamos la velocidad de ascenso de la sonda en función del tiempo registrado por el cronómetro de la sonda. Echando un vistazo a los primeros instantes tras soltar el globo (a partir del instante en el que el cronómetro de la sonda marca 6 minutos), vemos el efecto brutal de la fuerza de arrastre del aire atmosférico. Este efecto hace que se alcance aceleración nula inmediatamente, haciendo que el globo adquiriera una velocidad de ascenso, que pasa de 0 km/h a alrededor de 2 km/h casi instantáneamente (este valor hace que su aceleración sea 0). Este es el primer salto en velocidades la sonda que se aprecia en la figura 9, tras su lanzamiento. En consecuencia, todo el ascenso se hace a aceleración cero. Un segundo salto en velocidades lo encontramos entorno a los 42 minutos; éste es debido a que solo hemos considerado viento en la tropósfera hasta los 10 km de altitud. En esta figura, podemos apreciar que la velocidad máxima de ascenso que puede adquirir la sonda es de 33 km/h; ésta velocidad es alcanzada a los 77 minutos. A partir de ese instante la velocidad de ascenso disminuye. A los 98 minutos, desde que se activó el cronómetros de la sonda, se produjo el estallido del globo. En aquel momento, la velocidad, de acuerdo con este modelo, sería de 20 km/h. Si no se hubiera producido el estallado, la velocidad del globo hubiera llegado a ser nula entorno a los 109 minutos. A partir de ese instante, la velocidad de la sonda hubiera oscilado, tomando valores entorno a cero, amortiguándose con el tiempo y haciéndose nula definitivamente.

Finalmente en las figuras 10-12 se presentan cortes de los contornos de probabilidad 1σ y 2σ . En la figura 10, se presentan

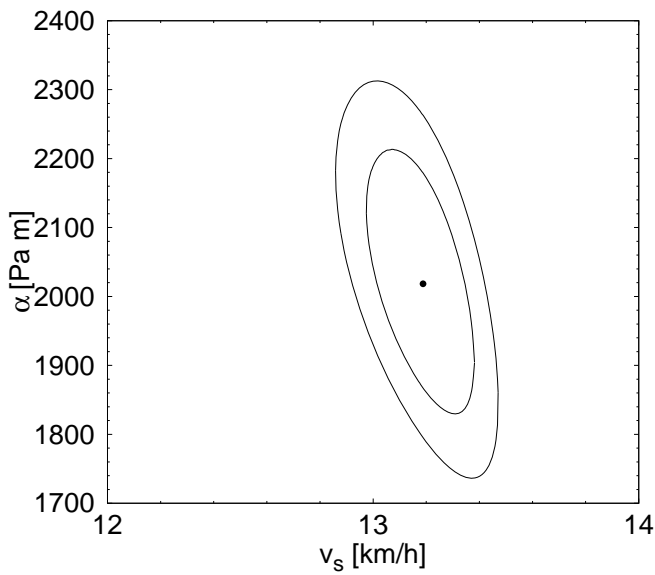


Fig. 10. Corte de contorno de probabilidad 1σ y 2σ , para (v_s, α) , y $\beta = 0.6334$. El punto representan los valores que conducen al mejor ajuste.

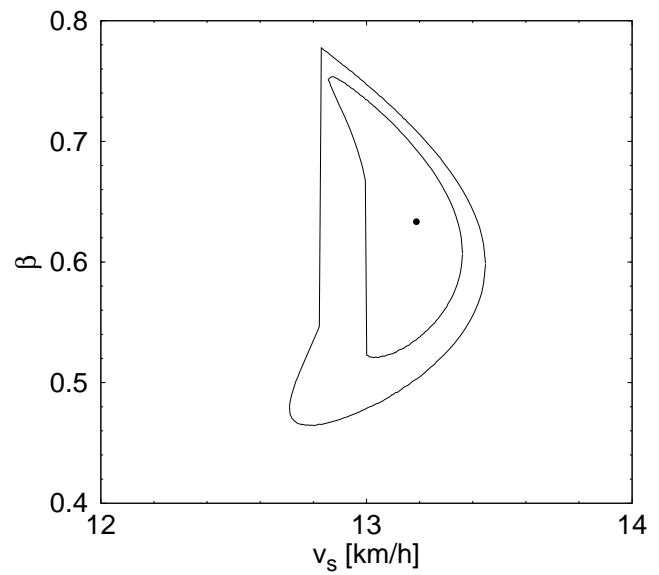


Fig. 12. Corte de contorno de probabilidad 1σ y 2σ , para (v_s, β) , y $\alpha = 2018$ Pa m. El punto representan los valores que conducen al mejor ajuste.

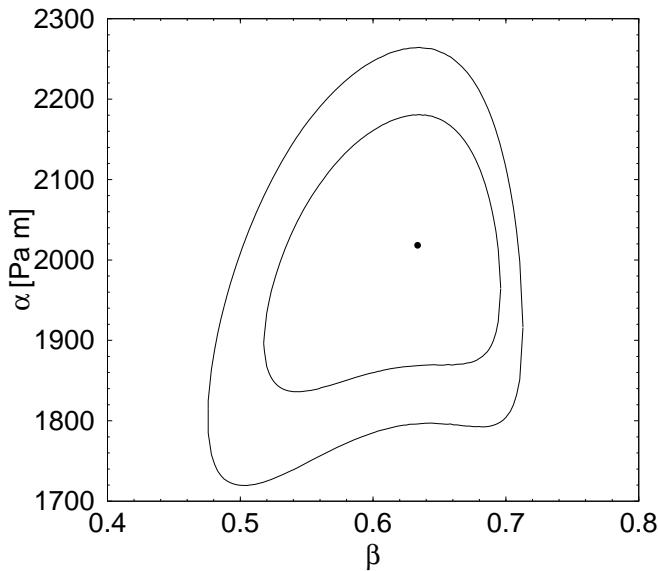


Fig. 11. Corte de contorno de probabilidad 1σ y 2σ , para (β, α) , y $v_s = 13.19$ km/h. El punto representan los valores que conducen al mejor ajuste.

los contornos para v_s y α , asumiendo $\beta = 0.6334$. En la figura 11, pueden apreciarse los contornos para β y α , con $v_s = 13.19$ km/h. Finalmente, en la figura 12, se muestran los contornos para v_s y β , con $\alpha = 2018$ Pa m.

7. Conclusiones

En este trabajo se han estudiado las temperaturas registradas por el sensor térmico del que iba dotada la sonda estratérica HAZIAK 1.

Comparando estos registros de temperatura con el modelo empírico de temperatura atmosférica y densidad de U. S.

Standard Atmosphere, se ha estimado la altitud alcanzada por la sonda en cada instante de medición.

Asumiendo un error de medida del sensor de 2° , se han estimados los errores en la determinación de altitudes.

De acuerdo con este estudio, se ha estimado que la altitud máxima alcanzada por la sonda fue de 36.6 ± 0.7 km. Esta altitud se alcanzó en el instante en el que se produjo el estallido del globo.

Se han estudiado varios modelos que dependen de un número diferente de parámetros. El valor de estos parámetros se ha determinado imponiendo la condición de que el modelo, que se deriva de ellos, sea el que proporcione el mejor ajuste a las altitudes obtenidas a partir de las mediciones de temperatura realizadas por el sensor de la sonda. Además del valor de los parámetros que conducen al mejor ajuste, se han obtenido los cortes de contorno de probabilidad 1σ y 2σ para cada uno de los modelos.

Se han estudiado modelos de velocidad constante para el ascenso de la sonda en tres regiones diferentes. Hasta 4 km de altitud, se ha estimado una velocidad de 11.4 ± 1.1 km/h (baja tropósfera). Desde 4 km hasta 15 km (alta tropósfera y tropopausa), la velocidad del mejor modelo es 22.7 ± 0.9 km/h. Finalmente, para el ascenso por la estratósfera se ha estimado una velocidad de 32.60 ± 0.6 km/h.

También se ha tratado un modelo hidrodinámico para el ascenso de la sonda. En este modelo se ha incluido, también, un modelo de viento descendente para la tropósfera que depende de dos parámetros. Al desconocer la tensión superficial del globo, se ha tomado ésta como el tercer parámetro del modelo. Este modelo ha permitido obtener, para cada instante, la evolución de la velocidad de la sonda y del radio del globo.

Según el modelo hidrodinámico, la velocidad máxima de la sonda fue de 33 km/h, alcanzada a los 77 minutos desde que se activó el cronómetro (6 minutos antes del lanzamiento del globo), que corresponde a 25 km de altitud. En el momento en el que se produjo el estallido del globo, la velocidad de la sonda era de 20 km/h. Si no hubiera estallado, hubiera alcanzado una altitud de 39.1 km, manteniéndose a esta altitud con velocidad vertical nula mientras el globo no tuviera pérdidas de helio.

De acuerdo con el modelo hidrodinámico, el globo aumentó de tamaño conforme ascendía. Su radio fue incrementándose desde su valor inicial de 1.16 metros, hasta los 5.36 metros que alcanzó en el instante del estallido.

En este modelo hidrodinámico se ha tratado un viento que decae de acuerdo con una potencia de la altitud. Los resultados del estudio indican que a 1 km había un viento descendente de 13.2 km/h, y de 3.1 km/h a 10 km.

En próximos lanzamientos se pretende dotar a las sondas de sensores de presión y de humedad, y llevar a cabo mediciones en intervalos muchos más cortos de tiempo. Esto permitiría determinar altitudes a partir de los registros de presión, y en consecuencia obtener resultados más precisos.

Appendix A: Ajuste de un modelo a datos experimentales u observacionales

A.1. Resultados de las mediciones

Consideremos que con un sensor tomamos mediciones de una magnitud u en N lugares diferentes, $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$. Supongamos que los resultados han sido u_1, \dots, u_N , con unos errores de medida $\sigma_1, \dots, \sigma_N$. Así, interpretamos que la probabilidad de que el sensor, en \mathbf{r}_i , mida u_i^* viene dada por la distribución normal (Gaussiana)

$$P(u_i^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_i^* - u_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.1})$$

La distribución (A.1) verifica, entre otras cosas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(u_i^*) du_i^* = 1; \quad (\text{A.2})$$

$$\langle u_i^* \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i^* P(u_i^*) du_i^* = u_i; \quad (\text{A.3})$$

$$\langle (u_i^*)^2 \rangle - \langle u_i^* \rangle^2 = \sigma_i^2; \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{u_i - \sigma_i}^{u_i + \sigma_i} P(u_i^*) du_i^* = 0.6835 \quad (\text{A.5})$$

Para interpretar (A.2-A.5), debe considerarse que el sensor toma un gran número de mediciones en cada uno de los lugares \mathbf{r}_i , proporcionando diferentes valores u_i^* . Para un determinado \mathbf{r}_i , la ecuación (A.2) nos dice que (A.1) está normalizada a uno, es decir, que la probabilidad de que el resultado de una medición esté entre $-\infty$ y $+\infty$ es la unidad. La ecuación (A.3), indica que el promedio de todas las mediciones es u_i . La ecuación (A.4) establece que σ_i es la variancia de (A1). Finalmente, la ecuación (A.5) dice que la probabilidad de que las mediciones estén entre $u_i - \sigma_i$ y $u_i + \sigma_i$ es del 68.35%.

A.2. Determinación de los parámetros de un modelo que conducen al mejor ajuste

Consideremos que hemos creado un modelo que es capaz de dar cuenta de los resultados de las mediciones que hemos tomado con el sensor. Este modelo, en general, va a depender de M parámetros, a_1, \dots, a_M , de manera que al modelo lo denotaremos por $u_{mod}(\mathbf{r}; a_1, \dots, a_M)$. El objetivo de esta subsección es presentar un método para determinar los valores de los parámetros del modelo que hacen que el modelo sea el que mejor ajusta a las mediciones.

Para ello, se va a asumir que los verdaderos valores de la magnitud u , para cada posición \mathbf{r}_i , vienen dados por el modelo,

es decir, que son $u_{mod}(\mathbf{r}_i, a_1, \dots, a_M)$. Además, vamos a suponer que las mediciones del sensor, u_1, \dots, u_N , son las del modelo más un error aleatorio que presenta la misma variancia que la que aparece en la ecuación (A.1). En consecuencia, la probabilidad de que, en la posición \mathbf{r}_i , el sensor registre un valor u_i viene dada por:

$$P(u_i; a_1, \dots, a_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_i - u_{mod}(\mathbf{r}_i, a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.6})$$

Y, la probabilidad de que, en las posiciones $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$, las mediciones del sesor sean u_1, \dots, u_N es, entonces,

$$P(u_1, \dots, u_N; a_1, \dots, a_M) = \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_i - u_{mod}(\mathbf{r}_i, a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right)^2 \right] \right\}; \quad (\text{A.7})$$

esto es,

$$P(u_1, \dots, u_N; a_1, \dots, a_M) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\chi^2/2}, \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_i - u_{mod}(\mathbf{r}_i, a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (\text{A.9})$$

Como puede apreciarse, el modelo $u_{mod}(\mathbf{r}; a_1, \dots, a_M)$ que mejor ajuste a las mediciones tiene que conducir al mayor valor de la probabilidad (A.9). En consecuencia, para encontrar este modelo, hay que buscar los valores de los parámetros a_1, \dots, a_M que hacen que χ^2 tome el valor más pequeño. A este valor de χ^2 lo llamaremos χ_{min}^2 , y al modelo, $u_{mod}(\mathbf{r}, a_1^0, \dots, a_M^0)$.

Si los valores de los parámetros que conducen al mejor ajuste son a_1^0, \dots, a_M^0 , también presentarán un buen ajuste aquellos modelos cuyos parámetros difieran un poco de los anteriores. Sin embargo, no tenemos ningún criterio para que, a partir de (A.9), podamos afirmar qué modelo puede considerarse como bueno (a excepción del que conduce a fijar a_1^0, \dots, a_M^0). A este respecto, en la subsección siguiente se presenta una manera de obtener una estimación de la bondad de estos conjuntos de parámetros, que difieren poco del que conduce al mejor modelo.

A.3. Estimación de valores óptimos de los parámetros de un modelo

Supongamos que los parámetros del mejor modelo son a_1^0, \dots, a_M^0 . En consecuencia, cualquier otro conjunto de parámetros, a_1, \dots, a_M , conducirá a peores ajustes conforme éstos difieran más de los anteriores. Una manera de dar cuenta de este efecto es establecer una probabilidad para cada parámetro, a_j , de tal manera que contra más cercano sea éste a a_j^0 , mayor sea su probabilidad. Así, contra mayor probabilidad presenten un conjunto de parámetros, mejor será el ajuste del modelo a los datos experimentales u observacionales. Una distribución que puede dar cuenta de esto es la distribución normal

$$P(a_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a_j - a_j^0}{\sigma_j} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.10})$$

La ecuación (A.10) nos dice que el valor del parámetro a_j que tiene la mayor probabilidad es el $a_j = a_j^0$, y que los parámetros

con mayor probabilidad se encuentran entre $a_j^0 - \sigma_j$ y $a_j^0 + \sigma_j$. Además, la distribución (A.10) es idéntica a la distribución normal (A.1), y verifica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(a_j) da_j = 1, \quad (\text{A.11})$$

$$\langle a_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a_j P(a_j) da_j = a_j^0, \quad (\text{A.12})$$

$$\langle a_j^2 \rangle - \langle a_j \rangle^2 = \sigma_j^2, \quad (\text{A.13})$$

$$\int_{a_j^0 - \sigma_j}^{a_j^0 + \sigma_j} P(a_j) da_j = 0.6835 \quad (\text{A.14})$$

Las ecuaciones (A.11) y (A.12) nos dicen que la función de probabilidad (A.10) está normalizada a la unidad, y que el valor medio de los parámetros es a_j^0 . La ecuación (A.13) indica que la variancia de (A.10) es σ_j . Finalmente, la ecuación (A.14) dice que la probabilidad integrada entre $a_j^0 - \sigma_j$ y $a_j^0 + \sigma_j$ es del 68.35%. Estos parámetros que están entre $a_j^0 - \sigma_j$ y $a_j^0 + \sigma_j$ podríamos considerarlos como aceptablemente buenos.

Ahora debemos de tener en cuenta de que tenemos M parámetros. En consecuencia, la probabilidad para los valores a_1, \dots, a_M , será

$$P(a_1, \dots, a_M) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2}} e^{-\chi_a^2/2}, \quad (\text{A.15})$$

donde

$$\chi_a^2 = \sum_{j=1}^M \left(\frac{a_j - a_j^0}{\sigma_j} \right)^2. \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, los valores de los parámetros que van a conducir al mejor modelo serán aquellos que maximicen (A.15), esto es, que minimicen (A.16). Como el mínimo de χ_a^2 , que podemos llamar $(\chi_a^2)_{min}$, es 0, se cumple la condición de que a_1^0, \dots, a_M^0 es el conjunto de parámetros del mejor modelo. Así, a medida que los parámetros difieran de esos, χ_a^2 va a ser cada vez más mayor, de manera que el modelo va a ser cada vez peor. Sin embargo, calcular χ_a^2 es imposible, dado que desconocemos los valores de las variancias σ_i .

No obstante, si que podemos conocer la probabilidad de cada χ_a^2 ; y, esto va a ser suficiente para estimar el rango de los parámetros que conducen a buenos ajustes. Para calcular esta probabilidad, se va reescribir la ecuación (A.16) como

$$\chi_a^2 = \sum_{i=j}^M y_j^2, \quad (\text{A.17})$$

con

$$y_j = \frac{a_j - a_j^0}{\sigma_j}. \quad (\text{A.18})$$

Dado que, de acuerdo con (A.10), la probabilidad de y_i viene dada por

$$P(y_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_j^2/2}, \quad (\text{A.19})$$

la probabilidad de χ_a^2 va a ser⁽⁹⁾

$$P(\chi_a^2, M) = \frac{1}{2^{M/2} \Gamma(M/2)} (\chi_a^2)^{(M/2)-1} e^{-\chi_a^2/2}, \quad (\text{A.20})$$

donde $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ es la función gamma. Así, con este proceso que hemos desarrollado, hemos conseguido asignar una probabilidad que nos da cuenta de la bondad de parámetros que difieren de aquellos del mejor ajuste, y que solo depende del valor de χ_a^2 . Contra mayor es χ_a^2 , menor es $P(\chi_a^2, M)$ y peor ajusta el modelo.

En la ecuación (A.14) hemos visto que los parámetros que conducen a un modelo aceptablemente bueno son aquellos tales que la probabilidad integrada hasta ellos es menor o igual a 0.6835. Diremos que estos parámetros están dentro de 1σ . Basándonos en este hecho, ahora, por convenio, tomaremos como parámetros de un modelo aceptablemente bueno, aquellos que conducen a un χ_a^2 tal que la probabilidad integrada de (A.20) hasta este χ_a^2 es menor o igual que 0.6835; es decir, que están dentro de 1σ .

Así, para un modelo de M parámetros, podemos definir $\Delta\chi_{1\sigma, M}^2$ como aquel χ_a^2 tal que la probabilidad integrada de (A.20) es 0.6835. En consecuencia, diremos que un modelo está dentro de 1σ si

$$0 \leq \chi_a^2 \leq \Delta\chi_{1\sigma, M}^2, \quad (\text{A.21})$$

con

$$\int_0^{\Delta\chi_{1\sigma, M}^2} P(\chi_a^2, M) d\chi_a^2 = \frac{\gamma(M/2, \Delta\chi_{1\sigma, M}^2/2)}{\Gamma(M/2)} = 0.6838, \quad (\text{A.22})$$

donde $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$ es la función gamma incompleta. De la misma manera podemos decir que un modelo de M parámetros está dentro de 2σ si

$$0 \leq \chi_a^2 \leq \Delta\chi_{2\sigma, M}^2, \quad (\text{A.23})$$

con

$$\int_0^{\Delta\chi_{2\sigma, M}^2} P(\chi_a^2, M) d\chi_a^2 = \frac{\gamma(M/2, \Delta\chi_{2\sigma, M}^2/2)}{\Gamma(M/2)} = 0.95. \quad (\text{A.24})$$

A.4. Aplicación a los parámetros de un modelo

En la subsección anterior, hemos visto que el modelo que mejor ajusta es aquel cuyos parámetros cumplen $\chi_a^2 = 0$; también vimos que buenos ajustes se obtienen con modelos de parámetros que satisfacen $0 \leq \chi_a^2 \leq \Delta\chi_{1\sigma, M}^2$, con $\Delta\chi_{1\sigma, M}^2$ calculado a partir de (A.22). Sin embargo, ésto no nos sirve de nada dado que somos incapaces de calcular χ_a^2 a partir de los valores de los parámetros.

No obstante, una manera de estimar los mejores parámetros es hacer uso conjunto de los resultados de las subsecciones (A.2) y (A.3). En la subsección (A.2), vimos que la minimización de χ^2 , dada por la ecuación (A.9), permite obtener el valor de los parámetros, a_1^0, \dots, a_M^0 , que conducen al modelo que mejor ajusta. En esa subsección, al mínimo de χ^2 , lo denominamos χ_{min}^2 . Así, asumiremos por convenio que los parámetros que conducen a los mejores modelos son aquellos que llevan a un χ^2 , tal que

$$\chi_{min}^2 + \Delta\chi_{1\sigma, M}^2 \leq \chi^2. \quad (\text{A.25})$$

Diremos, entonces, que estos modelos están dentro de 1σ . Algunos valores para $\Delta\chi_{1\sigma, M}^2$, para diferentes M , son: $\Delta\chi_{1\sigma(M=1)}^2 = 1.000$, $\Delta\chi_{1\sigma(M=2)}^2 = 2.296$, $\Delta\chi_{1\sigma(M=3)}^2 = 3.526$, $\Delta\chi_{1\sigma(M=4)}^2 = 4.720$. De la misma manera diremos que un modelo está dentro de 2σ si $\chi_{min}^2 + \Delta\chi_{2\sigma, M}^2 \leq \chi^2$, con $\Delta\chi_{2\sigma(M=1)}^2 = 1.000$, $\Delta\chi_{2\sigma(M=2)}^2 = 6.177$, $\Delta\chi_{2\sigma(M=3)}^2 = 8.026$, $\Delta\chi_{2\sigma(M=4)}^2 = 9.717$.

Appendix B: Modelos para el ascenso de la sonda

B.1. Determinación de los parámetros de un modelo que conducen al mejor ajuste a datos experimentales u observacionales

En este trabajo vamos a tratar con algunos modelos que describen la altitud alcanzada por la sonda, z_{mod} , en función del tiempo, t . Estos modelos van a depender, en general, de M parámetros, a_1, \dots, a_M , por lo que van a ser designados por $z_{mod}(t; a_1, \dots, a_M)$. Los valores de estos parámetros se determinan imponiendo la condición de que el modelo debe de ser el mejor ajuste a las altitudes deducidas a partir de las medidas de temperatura que tomó la sonda.

Pero, para llevar a cabo este proceso, es necesario tener información de los errores experimentales de las altitudes. Dado que son desconocidos los valores de estos errores, va a ser necesario hacer una hipótesis sobre ellos.

Una manera de introducir errores en las altitudes es suponer que el sensor de temperatura presenta errores de medición. Así, se va a suponer que el sensor, en sus mediciones de temperatura, introduce un error aleatorio. La probabilidad de que el sensor, en un punto, registre una temperatura T^* va a venir dada, entonces, por

$$P(T^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T^* - T}{\sigma_T}\right)^2\right], \quad (B.1)$$

donde T es el promedio de todas las temperaturas que registraría el sensor si estuviera siempre en ese punto, y σ_T es su variancia. $P(T^*)$ está normalizada a la unidad, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(T^*) dT^* = 1. \quad (B.2)$$

Además, puede verse que

$$\int_{T-\sigma}^{T+\sigma} P(T^*) dT^* = 0.6835; \quad (B.3)$$

esto es, la probabilidad de que la temperatura registrada esté entre $T - \sigma_T$ y $T + \sigma_T$ es del 68.35%. Hay que decir que los estudios de los modelos que se van a presentar aquí se van a hacer asumiendo $\sigma_T = 2^\circ$.

En la figura 1, se presentaron las temperatura medidas por el sensor de la sonda en diferentes instantes, t_i . En la sección 2, mediante una interpolación polinomial de los datos del modelo empírico USSA76, se determinó la altitud, $z_i \equiv z(t_i)$, alcanzada por la sonda en cada uno de esos instantes. Además, se calcularon las altitudes para el caso hipotético de que el sensor de temperaturas midiera 2° más que la temperatura real, y, también, para el caso en el que la temperatura registrada fuera 2° inferior a la temperatura real. Las altitudes alcanzadas, bajo estos supuestos, se designaron por $z_i^\pm \equiv z^\pm(t_i)$. A partir de estos datos y asumiendo la función de probabilidad dada por la ecuación (B.1) para los errores en temperaturas, se puede ver que la variancia de los errores de altitud sería $\sigma_i^\pm = |z_i^\pm - z_i|$. No obstante, por simplicidad, se tomará como variancia $\sigma_i = 1/2[\sigma_i^+ + \sigma_i^-]$. Debe de destacarse que una variancia para las temperaturas que no depende de cuándo ni dónde se hizo la medida, ha conducido a una variancia para las altitudes que depende del instante en el que la sonda registró la temperatura.

En consecuencia, se va a asumir que la probabilidad de que la altitud de la sonda en un instante t_i sea z_i^* viene dada por la distribución normal (Gaussiana)

$$P(z_i^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_i^* - z_i}{\sigma_i}\right)^2\right]. \quad (B.4)$$

La distribución (B.4) verifica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(z_i^*) dz_i^* = 1, \quad (B.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_i^* P(z_i^*) dz_i^* = z_i, \quad (B.6)$$

$$\int_{z_i - \sigma_i}^{z_i + \sigma_i} P(z_i^*) dz_i^* = 0.6835 \quad (B.7)$$

Si el sensor de temperatura pudiera tomar un gran número de mediciones en t_i , cada una de ellas conduciría a diferentes valores de la altitud de la sonda, z_i^* . En este sentido, la ecuación (B.5) afirma una cosa bastante obvia: la probabilidad de que la altitud de la sonda esté entre $-\infty$ y $+\infty$ es la unidad. La ecuación (B.6), indica que promedio de todas las altitudes posibles deducidas de las mediciones del sensor es z_i . Finalmente, la ecuación (B.7) dice que la probabilidad de que las altitudes de la sonda estén entre $z_i - \sigma_i$ y $z_i + \sigma_i$ es del 68.35%.

Una vez que se han creado los errores experimentales para las altitudes alcanzadas por la sonda, volvemos al objetivo de esta subsección. Éste era el de determinar los valores de los parámetros de un modelo $z_{mod}(t, a_1, \dots, a_M)$ que conducen al mejor ajuste a las altitudes alcanzadas por la sonda en los diferentes instantes en los que el sensor de temperaturas tomó registros. Para ello, se va a asumir que las verdaderas altitudes alcanzadas por la sonda en cada t_i vienen dadas por el modelo, es decir, que son $z_{mod}(t_i, a_1, \dots, a_M)$. Además, vamos a suponer que las altitudes, z_1, \dots, z_N , deducidas a partir de las temperaturas registradas por el sensor, son las del modelo más un error aleatorio que presenta la misma variancia que la que aparece en la ecuación (B.4). Por consiguiente la probabilidad de que, en el instante t_i , deduzcamos que la sonda está a una altitud z_i , a partir de la temperatura registrada por el sensor, viene dada por:

$$P(z_i; a_1, \dots, a_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_i - z_{mod}(t_i, a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i}\right)^2\right]. \quad (B.8)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que, en los instantes t_1, \dots, t_N , en los que el sensor tomó mediciones de temperatura, las alturas alcanzadas por la sonda fueran z_1, \dots, z_N será

$$P(z_1, \dots, z_N; a_1, \dots, a_M) = \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_i - z_{mod}(t_i, a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i}\right)^2\right] \right\}. \quad (B.9)$$

La función de probabilidad (9) la podemos expresar, también, como

$$P(z_1, \dots, z_N; a_1, \dots, a_M) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\chi^2/2}, \quad (B.10)$$

donde

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{z_i - z_{mod}(t_i; a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (B.11)$$

En consecuencia, el modelo $z_{mod}(t; a_1, \dots, a_M)$ que mejor ajuste a las mediciones tiene que conducir a la mayor probabilidad P , expresanda en la ecuación (B.10) con χ^2 dada por la ecuación (B.11). En consecuencia, para encontrar este modelo, todo lo que tenemos que hacer es buscar los valores de los parámetros a_1, \dots, a_M que hacen que χ^2 tome el valor más pequeño. A este valor de χ^2 lo llamaremos χ_{min}^2 y al modelo, $z_{mod}(a_1^0, \dots, a_M^0)$.

Appendix C: Ecuaciones para el movimiento de la sonda

C.1. Viento, velocidad microscópica y presión

Cuando hablamos de la velocidad del viento nos estamos refiriendo a la velocidad con la que se mueve el gas que contiene la atmósfera. Sin embargo, ésta no es la velocidad a las que se mueven las moléculas que lo componen. Además de la velocidad del viento, las moléculas tienen otra velocidad que llamamos velocidad microscópica o térmica; para la mayoría de las moléculas, su velocidad microscópica es aproximadamente la velocidad del sonido. Hay que decir que la velocidad del viento es el promedio de las velocidades de las moléculas del aire, mientras que el promedio de las velocidades microscópicas es cero.

Cada molécula transporta un momento. Si su velocidad es muy inferior a la de la luz, este momento es el producto de su masa por su velocidad. Si tomamos una superficie dentro del gas, la presión del gas nos indica cuanto momento atraviesa la unidad de área en la unidad de tiempo en la dirección perpendicular a la superficie; es decir, la presión es la fuerza que ejerce el gas por unidad de área.

Como la velocidad de las moléculas tiene dos componentes (la velocidad microscópica y la velocidad del viento), cada una de ellas contribuirá a la presión. La velocidad microscópica contribuye a la presión hidrostática y la velocidad del viento contribuye a la presión macroscópica. Pero, además, hay otra componente de la presión. Cuando la velocidad del viento varía de una región a otra, se produce una fricción entre estas dos regiones que da lugar a una transferencia de momento; en consecuencia una superficie puede recibir momento procedente de la transferencia de momento por viscosidad.

La atmósfera se comporta prácticamente como un fluido incompresible. De hecho, la densidad de masa del aire varía mucho menos que la velocidad del viento. Si, además, suponemos que la velocidad del viento es vertical, v_z , y que éste solo depende de la altitud, z , entonces, la presión, que designaremos por Π , es

$$\Pi = nK_B T + \rho v_z^2 - \eta \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (C.1)$$

Debe decirse que Π es la componente zz del tensor de flujo de momento (proyección de momentos en la dirección vertical y superficie orientada, también, en la dirección vertical); aquí solo usaremos esta componente de las nueve que tiene el tensor (para diferentes proyecciones del momento y orientaciones de la superficie). En la ecuación (C.1), el primer término es la presión hidrostática, \mathcal{P} ; en este término, n es la densidad número de partículas o partículas por unidad de volumen, $K_B = 1.3806504 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann, y T , es la temperatura del aire. El segundo término es la presión macroscópica, donde $\rho = mn$ es la densidad de masa o masa por unidad de volumen del aire, siendo $m = 6.646476 \times 10^{-27}$ kg, el peso molecular medio del aire. Finalmente, el tercer término es consecuencia de la viscosidad, donde $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ kg m⁻¹ sec⁻¹ es el coeficiente de viscosidad del aire.

Si la velocidad del viento es muy inferior a la velocidad del sonido en la atmósfera, la presión macroscópica es mucho menor que la presión hidrostática, y podría despreciarse. No obstante, cuando hay viento, y bajo determinadas circunstancias, se puede formar turbulencia que hay que tenerla en cuenta. La viscosidad es, entonces, la encargada de debilitar los remolinos transfiriendo momento de éstos a otras regiones. Es suficiente con hacer un simple cálculo dimensional (imponiendo que el segundo término de la ecuación (C.1) sea muy inferior al tercer

término de esa ecuación), para darse cuenta que un remolino de tamaño L se deshace si $\rho L v / \eta \ll 1$, donde ρ y v son la densidad de masa y velocidad del aire, respectivamente. Así pues, a gran escala, hay turbulencia, pero siempre habrá una escala tal, que remolinos de tamaño más pequeño son disipados por la viscosidad del aire.

Por otra parte, cuando un cuerpo se mueve por un fluido, como es el caso de un globo sonda estratosférico en la atmósfera, se produce una fricción entre ambos. Además, el aire tiene que modificar su velocidad en las cercanías del objeto, para poder sobrepasarlo; en consecuencia, la velocidad del viento es diferente de un extremo a otro del cuerpo. Así, se dice que la escala de longitudes del aire, en los alrededores de un objeto, es el tamaño del objeto que viaja por él. Podríamos preguntarnos si hay remolinos con ese tamaño. Para ello simplemente tenemos que hacer el mismo cálculo que se presentó en el párrafo anterior. Si el cuerpo tiene tamaño l y se mueve con respecto al fluido, de densidad ρ , a velocidad relativa u , podemos calcular lo que se denomina número de Reynolds, $Re = \rho L v / \eta$. Si el número de Reynolds es mucho menor que la unidad, no habrá remolinos, ni a esa escala, ni a escalas inferiores; en consecuencia, el movimiento del aire alrededor del cuerpo no será turbulento, y el cálculo de su movimiento será relativamente sencillo (hay que tener en cuenta que ahora vamos a tener diferentes proyecciones para el momento y diferentes orientaciones para la superficie, dependiendo de la forma del objeto; es decir, habrá que trabajar con todas las componentes del tensor de flujo de momento). Si esto no ocurre, habrá turbulencias. Debe decirse que el tratamiento de la turbulencia es complicado.

C.2. El equilibrio hidrostático en la atmósfera

Para tratar el movimiento de la sonda estratosférica va a ser necesario conocer las ecuaciones que rigen el movimiento del gas de la atmósfera. En nuestro caso, va a ser suficiente con tratar la ecuación de movimiento o de conservación del momento.

Una forma sencilla de obtener la ecuación de conservación del momento es estudiar el movimiento de una región de aire con forma de cubo de tamaño infinitesimal, con dos de sus caras paralelas al suelo. Para ello, solo hay que conocer las fuerzas que actúan sobre el cubo de aire y, a partir de ellas, calcular su aceleración. Obviamente, para el cubo no hay viento, dado que él se mueve con el aire. Así, las fuerzas que siente van a estar determinadas por la presión dada por la ecuación (C.1), pero sin considerar el término macroscópico. El aire que está por debajo del cubo ejerce una fuerza sobre él que lo haría ascender; esta fuerza es el producto de la presión que tiene debajo por el área de una cara del cubo. Por su parte, el gas que hay por encima, ejerce una fuerza hacia abajo que lo haría descender; esta fuerza sería, por lo tanto, la presión que hay por encima del cubo multiplicado por el área de una de sus caras. Pero, además, tenemos la fuerza de la gravedad, que obliga a descender al cubo; esta fuerza la podemos tomar como la masa del cubo por la aceleración de la gravedad al nivel del mar, $g = 9.81$ m/sec. En consecuencia, la aceleración vertical del gas atmosférico, a_z viene dada por (las ecuaciones completas se pueden consultar en la referencia 10):

$$a_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} - g + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}. \quad (C.2)$$

La ecuación (C.2) es la que se utiliza para tratar el viento vertical en la atmósfera. No obstante, debe decirse que el término de presión y el de gravedad están prácticamente compensados. Esto hace que una buena aproximación, que permite tratar con

simplicidad el movimiento de la sonda, es despreciar el término de viscosidad y suponer que hay equilibrio hidrostático (aceleración vertical nula). Así, en este estudio usaremos

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} - g. \quad (\text{C.3})$$

C.3. Ecuación del movimiento vertical de un cubo en la atmósfera

Nuestro objetivo es averiguar cómo asciende un globo sonda estratosférico. Para ello, debemos determinar las fuerzas que actúan sobre él y, a partir de ellas, calcular su ecuación de movimiento. Obviamente, el globo no va a llevar la misma velocidad que el aire, por lo que va a sentir los efectos de la presión macroscópica. Nos vamos a encontrar, también, con que el aire, como no puede atravesar el globo, debe modificar su velocidad en módulo y dirección para evitar al objeto. Esto significa que van a aparecer, además de la componente vertical de su velocidad, componentes de la velocidad en las otras direcciones. Si a esto añadimos la turbulencia que se pueda formar, uno puede imaginarse la complejidad del problema.

Las fuerzas derivadas de la presión hidrostática del aire y de la fuerza de la gravedad se calculan del mismo modo que se hizo para el caso del aire (ver la subsección anterior). Para números de Reynolds mucho más pequeños que la unidad, es decir, cuando los remolinos en los alrededores del globo son disipados por la viscosidad del aire, el término macroscópico puede despreciarse y el cálculo de la fuerza que quedaba por determinar es relativamente sencillo. Cuando esto no ocurre, el problema es tan complicado que hay que recurrir a experimentos para determinar esta fuerza, que se denomina fuerza de arrastre.

La ecuación para el movimiento vertical del globo toma la siguiente forma:

$$Ma = -\frac{4\pi}{3}R^3 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} - Mg \mp \frac{\pi}{2}R^2 C_d \rho (v - v_a)^2. \quad (\text{C.4})$$

En la ecuación (C.4), M y R son la masa y el radio del globo sonda; a es la aceleración vertical del globo y z su altitud; \mathcal{P} es la presión hidrostática del aire de la atmósfera; g , como antes se ha comentado, es la aceleración de la gravedad al nivel del mar; C_d es el coeficiente de arrastre; v es la velocidad vertical del globo (positiva si asciende el globo, y negativa si desciende); y, v_a es la velocidad vertical del aire (positiva si hay aire ascendente y negativa si el viento es descendente).

El término de la izquierda de la ecuación (C.4) es la masa del globo multiplicada por su aceleración vertical. El primer término de la derecha muestra las fuerzas ejercidas por el movimiento microscópico del gas sobre el globo (deducidas a partir de la presión hidrostática del gas). Hay que tener en cuenta que, para obtener este término, se ha supuesto que la transferencia de momento entre el aire de la atmósfera y el globo es totalmente eficiente; es decir, que estamos suponiendo que las colisiones entre el gas de la atmósfera y el material del globo son elásticas. No obstante, ocurre que en los impactos, parte de la energía es invertida en deformar el globo y en calentarlo o enfriarlo. Sin embargo, en nuestros cálculos despreciaremos estos efectos y consideraremos colisiones elásticas. El segundo término de la derecha es la fuerza de la gravedad sobre el globo. Finalmente, el tercer término es la fuerza de arrastre.

En la fuerza de arrastre, el signo negativo se utiliza cuando la velocidad del globo menos la del viento es una cantidad positiva; el signo positivo debe usarse en caso contrario. La fuerza de arrastre se compone de dos partes: $\pi R^2 \rho (v - v_a)^2$, que es la

fuerza debida a la presión macroscópica del aire sobre una superficie de radio R ; y $C_d/2$, que es el cociente entre la fuerza de arrastre y la expresión anterior.

Si tomamos un valor para la densidad del aire de $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$, un radio para el globo sonda de $R = 3 \text{ m}$, y una velocidad relativa de 20 km/h , obtenemos un número de Reynolds, $Re \approx 1.2 \times 10^6$. Es decir, estamos en el caso en el que vamos a tener una gran turbulencia alrededor del globo. A partir de experimentos realizados en situaciones en las que el número de Reynolds es muy grande, se obtiene que el coeficiente de arrastre es $C_d = 0.44$.

El efecto de la presión hidrostática sobre el globo sonda, que aparece en la ecuación (C.4), lo podemos conocer a partir del equilibrio hidrostático de la atmósfera. Así, finalmente, llevando la ecuación (C.3) a la ecuación (C.4), tenemos

$$Ma = \left[\frac{4\pi}{3}R^3 \rho - M \right] g \mp \frac{\pi}{2}R^2 C_d \rho (v - v_a)^2. \quad (\text{C.5})$$

El primer término de la derecha nos dice que el globo debería ascender acelerado si la masa del globo es menor que la del aire contenido en un volumen igual al del globo (masa de aire desplazado). Sin embargo, el segundo término de la derecha nos dice que el gas de la atmósfera va a intentar impedir que el globo se acelere; de hecho, contra mayor sea la diferencia de velocidades entre el globo y el aire mayor es la fricción entre ellos, y más se opone el aire a que se acelere el globo.

A partir de la ecuación (C.5), uno puede advertir que, para determinar el movimiento de la sonda, va a ser necesario conocer el tamaño del globo en cada instante. La ecuación que nos da esta información es la ecuación de conservación del momento en la dirección horizontal. Por simplicidad, despreciaremos el movimiento horizontal del globo y consideraremos, simplemente, que las presiones están compensadas; es decir, supondremos que la presión dentro del globo compensa el efecto de su tensión superficial y la presión externa. Así, despreciando las velocidades y aceleraciones horizontales del globo, tenemos que:

$$\mathcal{P} + \frac{\alpha}{R} = \frac{N_{He}}{4\pi R^3/3} K_B T \quad (\text{C.6})$$

En la ecuación (C.6), el primer término es la presión atmosférica, el segundo es la tensión superficial, y el tercero es la presión ejercida por el helio contenido en el globo. Debe decirse que no conocemos la temperatura del helio en cada instante. Sin embargo, podemos asumir que el número de colisiones entre el gas y el material del globo y entre el helio y el material del globo es tan grande que se termalizan en una escala de tiempos muy inferior a la del movimiento del globo. Esto significa que estamos suponiendo que en cada instante la temperatura externa, la del material del globo y la del helio contenido en él son iguales.

References

- (1) Sonda estratosférica HAZIAK 1: <http://www.laotramitad.org/laotramitad/index.php/sonda-estratosferica-haziak-1>
- (2) <http://www.laotramitad.org>
- (3) <http://www.ti.com/lit/ds/snis169a/snis169a.pdf>
- (4) NOAA, NASA, USAF; Washington D. C. 1976
- (5) Ver, por ejemplo, <http://www.pdas.com/atmos.html>
- (6) Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, Numerical Recipes in Fortran (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- (7) Ver, por ejemplo: <http://www.intercentres.edu.gva.es/iesleonardodavinci/Fisica/Cinetico-cropuscular/Tension-superficial.pdf>
- (8) SCIENTIFIC SALES: <http://www.scientificsales.com>
- (9) Ver, por ejemplo: http://es.m.wikipedia.org/wiki/Distribución_χ²
- (10) Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. 2003, Fluid Mechanics (Oxford: Butterworth-Heinemann)